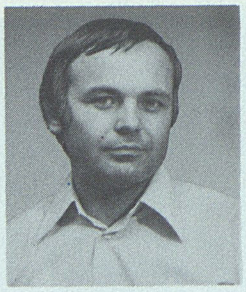


Küzmös György

SZINTVONALAS TÉRKÉP SZERKESZTÉSÉNEK SZÁMÍTÓGÉPES ALGORITMUSA

A szintvonalas térkép szerkesztésén kívül a számítóközpontunkban kidolgozott algoritmus más szintvonalszerkesztési feladatnál is használható, felületsüllyedés és feszültségi nívóvonalak meghatározására is alkalmas.

Szintvonalszerkesztéskor adott „N" db három koordinátával (*X, Y, Z*) meghatározott pont, ahol az *X, Y* a pont helyzete, a „*Z*" az abszolút vagy a relatív magasság, illetve az adott ponthoz tartozó süllyedés, vagy a feszültség értéke. Ezekből kell az azonos „*Z*" magasságú pontokat összekötő görbéket, azaz a szintvonalakat megszerkeszteni.

A szintvonalak meghatározásához a szomszédos pontok között kell interpolálnunk, s ehhez szomszéd pontokat meghatároznunk. Környezetként fölvehetünk kört vagy a koordináta-különbségek abszolút értékének összegezésével meghatározott négyzetet, vagy hasonló szabályos alakzatot. Ez azonban nem vezet célhoz, ugyanis egy adott pont egyik oldalán a legközelebbi pont távolsága többszöröse lehet a másik oldali, szomszédos pont távolságának. Akárhogy illesztjük a környezetet, csökkentjük vagy növeljük, lemarad olyan pont, amit feltétlenül figyelembe kellene venni. A másik irányban viszont olyanok is beleesnek, amelyek előtt már több másik van. Gondot okoz, hogy egy adott szintnél környezetenként interpolálva nagy mennyiségű pontot kapunk. Melyiket kössük össze? Ha a területet egyszeresen lefedjük háromszögekkel, akkor a szomszédos pontok meghatározhatók. Csak azokat a pontokat vesszük figyelembe, amelyek olyan háromszögek csúcspontjai, aminek az egyik csúcsa az adott pontunk. Az adott szinthez tartozó síkkal elmetszve a pontmagasságot is figyelembe véve a térbeli háromszöget, a szintvonal egy szakaszát kapjuk. Ezekből alakul ki a szintvonal-rendszer. E módszert alkalmazza az UVATERV R 20 számítógépén és a Calcomp 9000-es rajzgépén működő szintvonal-rajzoló-program.

A rajz elkészítéséhez az alábbi információkat kell közölni a géppel: „N" db pont koordinátáját, a szintvonalközt, a méretarányt, továbbá a feladat azonosításához szükséges szöveget és tervszámot.

A további hivatkozásokat megkönnyíti, ha a koordinátajegyzék megfelelő értékeit 1-től N-ig (jelölve a *DZ* szintvonalközt) az *X, Y, Z* tömbökbe rakjuk el.

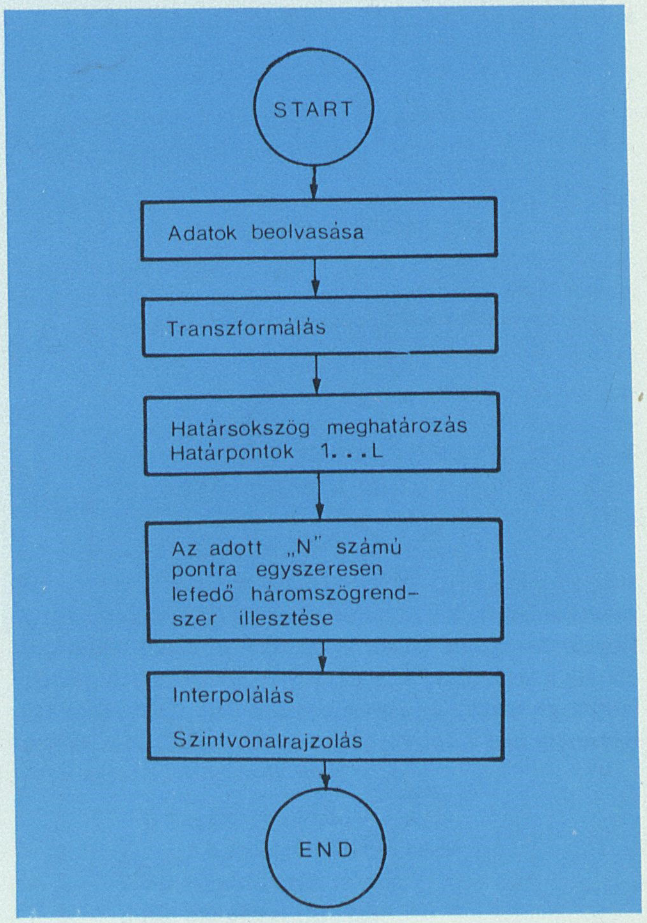
A transzformálás

A blokkban a méretarány és a rajzgép koordinátarendszerétől függően az *X, Y* koordinátákat transzformáljuk. A rajzgépek általában a Descartes-féle koordinátarendszert használják, így az esetleg délnyugati vagy más rendszerben adott koordinátákat át kell transzformálni. Mivel a pontok koordinátajegyzéke általában méterben adott, az *X, Y* értékeket be kell szorozni a rajzgép cm vagy inch-es léptékének megfelelő tényezővel. A kívánt méretarány további szorzást jelent.

A papír ésszerű kihasználása érdekében, és hogy a rajz elférjen, az egész pontrendszert megfelelő szöggel el kell forgatni. Az őrkereszt a rajz illeszthetőségét biztosítja.

A határsokszög meghatározása

A blokkban tetszőlegesen elhelyezkedő *N* darab három koordinátával adott pontot az *X, Y* síkban körülhatároljuk. Elvileg az „*N*" számú pontra lehetne illeszteni egy *N*-ed rendű felületet, és a szintvonalak a megfelelő *Z* értékhez tartozó nívóvonalak lennének. A programozás azonban olyan nehézségekbe ütközik, amit az esetleges pontosabb eredmény nem ellensúlyozna.



Az N számú pont körülhatárolására a későbbi előnyök miatt is, a legmegfelelőbb a ponthalmaz szélső pontjaira illeszkedő konvex sokszög.

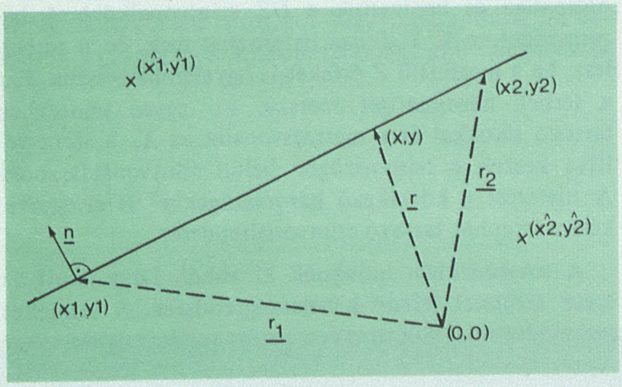
Egy síkbeli egyenes normál egyenletébe helyettesítsük be a két különböző pont koordinátáit. A két érték előjele megegyezik, ha a pontok egy oldalon vannak, eltérő, ha az egyenes által meghatározott különböző félsíkokba esnek. Természetesen külön kell megvizsgálni azt az esetet, amikor a pontok valamelyikére vagy mind a kettőre a helyettesítési érték nulla, vagyis a pont az egyenesen van. Az X, Y pont rajta van az $X1$, $Y1$, $X2$, $Y2$ pontok által meghatározott egyenesen, ha az

$$\underline{r}_2 - \underline{r}_1 = (X_2 - X_1,\ Y_2 - Y_1)$$

$$\underline{n} = (-|Y_2 - Y_1|,\ X_2 - X_1)$$

$$\underline{r} - \underline{r}_1 = (X - X_1,\ Y - Y_1)$$

vektorokra az $(\underline{n},\ (\underline{r} - \underline{r}_1))$ belső szorzat értéke nulla. Koordinátásan kiírva:



$$[-(Y_2 - Y_1),\ X_2 - X_1]\ (X - X_1,\ Y - Y_1) = 0$$

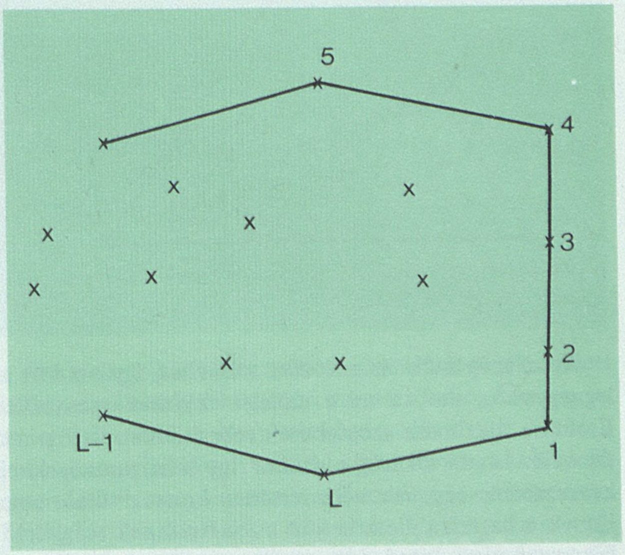
Elvégezve a belső szorzást

$$-(Y_2 - Y_1) * (X - X_1) + (X_2 - X_1) * (Y - Y_1) = 0$$

Az egyenletünkbe $(X,\ Y)$ helyére helyettesítve az egyenes két oldalán található $(X_1,\ Y_1)$, illetve $(X_2,\ Y_2)$ pont koordinátákat, a nullától különböző eredmények előjele eltérő lesz.

A határsokszög-keresés algoritmusa a fenti tételből következik. Vegyünk az adott N számú pontból egy szélsőt, legyen ez a legnagyobb „X" koordinátájú pont, és ha ilyen több van, akkor ezek közül keressük a legkisebb „Y" koordinátájút. Rakjuk ezt az X, Y, Z tömb elejére, és cseréljük ki az első elemmel. A másodiktól az N-ig keressünk egy olyan pontot (legalább kettő van), amire igaz, hogy ha az első és a keresett ponton átmenő egyenes egyenletébe helyettesítjük 1-től N-ig a pontjaink koordinátáit, a nullától különböző értékek előjele megegyezik, – tehát az összes pont az egyenesünk egyik oldalán van.

Közben össze kell gyűjtenünk azokat a pontokat, amelyeknél az egyenes egyenletébe helyettesítve nullát kapunk, s rajta vannak az egyenesen. A pontokat (az első ponthoz viszonyított távolságok szerint rendezve) be kell rakni – természetesen cserével – az X, Y, Z tömb 2-ik, 3-ik, L-edik elemének. (A sorrendben utolsónak berakott határpont sorszámát L-lel jelöljük).



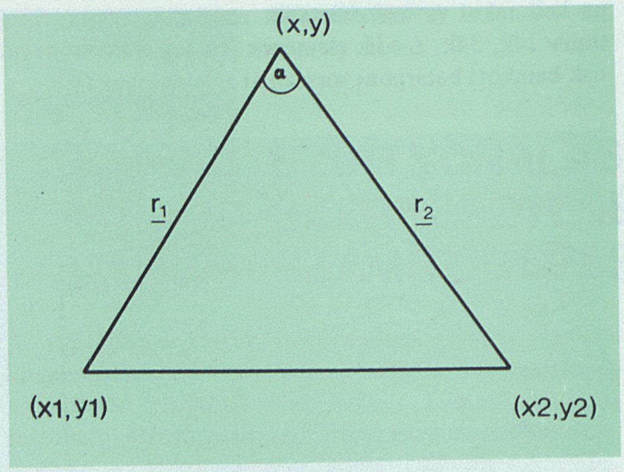
Ha nem kaptunk nulla értéket, – az első és a keresett pont kivételével, – akkor csak a feltételeknek megfelelő pontot kell berakni a tömb második helyére. Ezután a ponthoz keressük meg a következő határpontot az $(L+1)$-iktől N-edikig terjedő pontok között. Így eljutunk egy olyan L-edik határponthoz, hogy bármely, ebből kiinduló és az $(L+1)$-ediktől N-edikig terjedő pontok valamelyikén átmenő egyenes a ponthalmazunkat az X, Y síkban két részre vágja. Ezzel megkaptuk a pontjainkat határoló konvexsokszög csúcspontjait a körüljárásnak megfelelő sorrendben.

Az X, Y síkban adott, N pontra egyszeresen lefedő háromszögrendszer illesztése

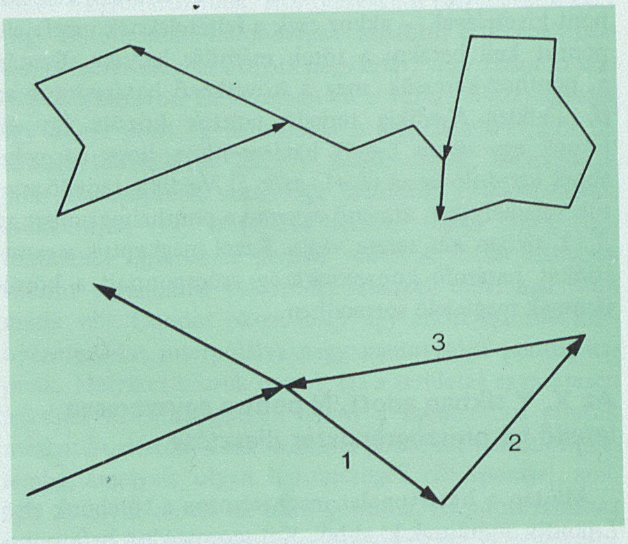
Miután a határvonalat meghatározza a tömbünk első L-pontja, induljunk ki abból. Két szomszédos határponthoz keresni kell egy harmadikat, ahonnan a két határpontot összekötő szakasz maximális szög alatt látszik. Thalész-tételének általánosítása szerint azok a pontok, amelyekből egy szakasz ugyanolyan szög alatt látszik, egy köríven vannak. Mivel a maximális szöget adó pontot választottuk, a kerületi szögekre vonatkozó tételekből következik, hogy a köríven belül, így a háromszögünkön belül már nincs a pontjaink közül. Tehát a háromszögeink nem fognak egymásba metszeni. A három pont koordinátájából meghatározható a szög cosinusa:

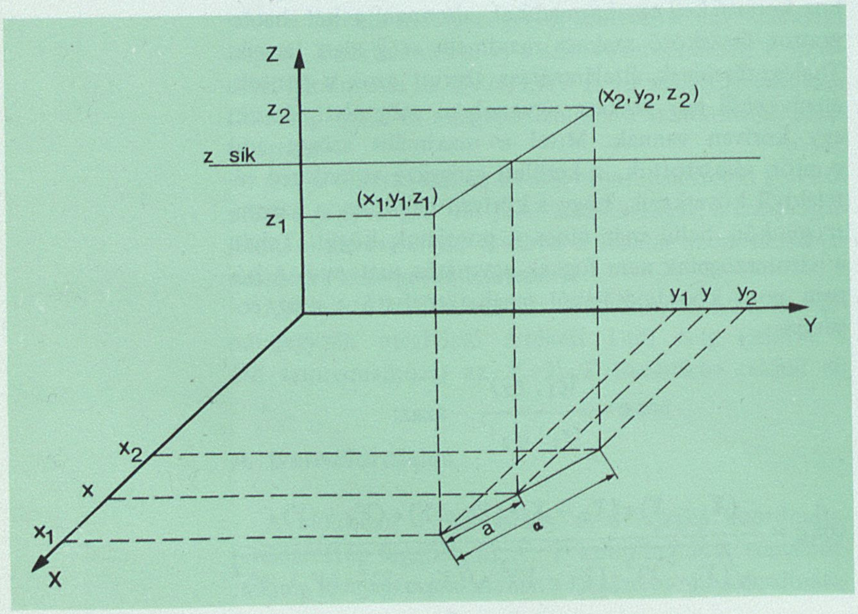
$$\cos a = \frac{(\underline{r}_1,\ \underline{r}_2)}{|\underline{r}_1|\,|\underline{r}_2|} \quad \text{azaz:}$$

$$\cos a = \frac{(X_1 - X) * (X_2 - X) + (Y_1 - Y) * (Y_2 - Y)}{\sqrt{(X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2}\ \sqrt{(X_2 - X)^2 + (Y_2 - Y)^2}}$$



Az α szög nulla és π között változhat, így ott lesz a legnagyobb, ahol a $\cos \alpha$ előjelét tekintve minimális. Ezeket a maximális szögfeltételt teljesítő háromszögeket illesszük a határsokszög oldalaira. Így a háromszögekkel közrezárunk egy már nem feltétlen konvex síkidomot. Ennek a határára illeszthetjük a feltételeknek megfelelő háromszögeket mindaddig, amíg a területünk el nem fogy.





Ahhoz, hogy egy háromszög csak egyszer forduljon elő, és az egész területet lefedjük, különféle vizsgálatokat kell végezni. Nem biztos, hogy a belső terület összefüggő. A középső részen a szemközti határvonalak teljesen egybeesnek. Ilyenkor a határsokszög következő oldalára lépünk anélkül, hogy háromszöget keresnénk.

Azért, hogy a területet csak egyszeresen fedjük le, és elkerüljük az egymásba metszést, vizsgálni kell a határsokszög lehetséges hurkait. Ez tulajdonképpen a nem összefüggő belső terület speciális esete.

Mind a két 2-es oldalon levő pontot ki kell szedni a határpontok közül, és ki kell zárni a további vizsgálatból. Az 1. és a 3. oldal metszéspontja kétszer szerepel határpontként, a továbbiakban azonban csak egyszer fordulhat elő.

Interpolálás, szintvonal-rajzolás

Amikor megtaláltunk egy háromszöget, minden adott az interpoláláshoz. Ismert a három pontunk X, Y, Z koordinátája és beolvastuk a DZ szintvonalközt. A háromszöget az X, Y síkban határoztuk meg, de az térbeli lesz, ha a megfelelő Z értéket is figyelembe vesszük. Ezt a térbeli háromszöget metszve az egyes szintekhez tartozó síkokkal és a metszésvonalat az X, Y síkra vetítve készek a háromszögön belüli szintvonaldarabok. A metszést a következő háromszögekkel is elvégezve, kész a terephez tartozó szintvonalrendszer.

A továbbiakban induljunk ki abból, hogy adott az egész területet lefedő háromszögrendszer. A szinteket sorba véve rajzoljuk meg – az egész területen – az adott magassághoz tartozó szintvonalakat.

Mindenekelőtt meg kell határozni azokat a magasságokat, amelyeknél rajzolni kell. Kikeressük a Z min. és a Z max. koordinátákat a Z értékek közül. Vennünk kell az első Z min.-nél nagyobb DZ szintvonalközzel osztható számot. Ez lesz az első magassági szintünk. A DZ-t hozzáadogatva, amíg át nem lépjük a Z max.-ot, kapjuk a többi szintet. Ezáltal a számítási eljárásban egy ismétlődő folyamatot, ciklust képeztünk. A ciklus minden lépése két részből, interpolálásból és rajzolásból áll.

Az interpolációnál azt kell meghatározni, hogy a Z vízszintes sík a térbeli háromszögrendszerünkből melyeket metszi. Ha meghatározzuk a metszéspontokat, megkaptuk a szintvonal egy-egy darabját. Az (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2)-ből, a hasonló háromszögekből egyszerűen meghatározható a metszésponthoz tartozó X, Y.

$$\frac{Z_2 - Z_1}{Z - Z_1} = \frac{d}{a} = \frac{X_2 - X_1}{X - X_1} = \frac{Y_2 - Y_1}{Y - Y_1}$$

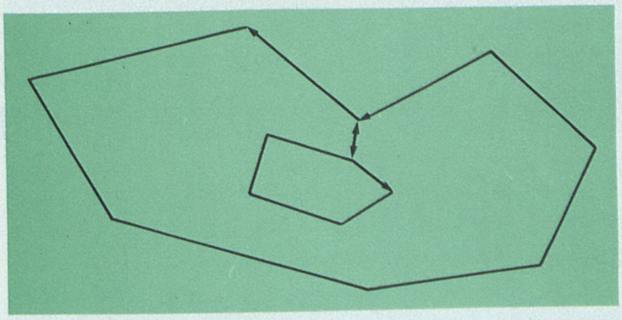
$$X = X_1 + \frac{Z - Z_1}{Z_2 - Z_1}(X_2 - X_1)$$

$$Y = Y_1 + \frac{Z - Z_1}{Z_2 - Z_1}(Y_2 - Y_1)$$

Gyűjtsük össze a „Z” szinthez tartozó szintvonaldarabok végpontjainak koordinátáit! Miután végigvizsgáltuk az összes háromszöget, rajzolhatunk. A szintvonal mehet határtól-határig, vagy lehet zárt görbe, mind a két esetben ugyanúgy járunk el. Megkeressük a rajzgép tollának pillanatnyi helyzetéhez legközelebbi szintvonaldarabot. Az egyik végpontjára visszük a tollat felemelve, és húzunk egy vonalat a másik végpontig.

Keressük meg azt a szintvonaldarabot, amely kapcsolódik a már megrajzolthoz, s az egyik végpontja a toll pillanatnyi helyzetébe esik, azaz távolságunk nulla! Ha nem találunk több kapcsolódó szakaszt, akkor felemelve a rajztollat megyünk a legközelebbi szintvonaldarabhoz. Természetesen, egy gépi jelölési rendszer segítségével, menet közben kizárjuk azokat a szintvonalrészeket, amelyeket már megrajzoltunk. Miután megrajzoltuk az adott szinthez tartozó szintvonalakat, végrehajtottuk a ciklus mindkét lépését. A magasság megnövelése után egészen addig végezzük a műveletet, amíg el nem érjük a Z_{max}-ot.

A fentiekben ismertetett szintvonalszerkesztési algoritmus lehet önálló program vagy programrész, ha beépítjük egy olyan számítóprogramba, ami átadja az N pont három koordinátáját, a méretarányt és a szintvonalközt. Ezáltal a szintvonalas térképet rajzoló programot be tudtuk kapcsolni a geodéziai felméréseket feldolgozó komplex programcsomagba.



A módszer kis változtatásokkal más feltételek mellett is felhasználható. Kihagyható a határsokszög-keresés, ha az első L pont, a nem feltétlen konvexhatár a körüljárásnak megfelelő sorrendben adott. Az sem akadály, ha a területünk nem egyszeresen összefüggő, van benne egy belső, körülhatárolt rész, azaz lyuk. Az algoritmus megengedi, hogy a számítandó szinteket nem kötelező egyenlő lépésközzel venni.