Társulati élet

Matrixelmélet és alkalmazásai kollokvium előadáskivonatai

Szeptember 22., hétfő de.

Bosznay Ádám: *Mechanikai lengőrendszerek vizsgálata matrix-számítás segítségével.* Elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt fontos probléma mechanikai lengőrendszerek sajátkörfrekvenciáinak meghatározása. Határozatlan szabadságfok (rendszám) esetén jelenleg csak néhány egészen speciális felépítésű lengőrendszerfajta sajátkörfrekvenciáit tudjuk explicite felírni, a gyakorlati problémákban azonban az ilyeneknél általánosabb lengőrendszerek sajátkör-frekvencia-meghatározásának kérdése merül fel. Gyakorlatilag jól alkalmazható módszerekkel is csak az ún. láncszerű, sima modellel kapcsolatban rendelkezünk. Célszerű tehát a nem ilyen modelleket velük megegyező sajátkörfrekvenciákkal bíró láncszerű sima modellekre visszavezetni. S. Falk adott egy ilyen módszert, de képleteinek levezetését nem közölte. Az előadás a Lánczos által szerkesztett egyik véges iterációs eljárásra támaszkodva a *matrixszámítás alkalmazásával* bemutatta ezeknek a képleteknek a levezetését. Különösen előnyösnek tűnik a Falk-féle visszavezetés és az előadó által régebben szerkesztett sajátkör-frekvencia meghatározó módszer összekapcsolása.

Szabó János: *A matrix-számítás alkalmazása hídszerkezetek szilárdsági vizsgálatánál.* Az alkalmazhatóság feltétele — a szuperpozíció lehetősége és a terhelések — alakváltozások közötti lineáris összefüggés — hídszerkezeteknél vagy eleve teljes egészében, vagy az értelmezési tartomány egyes kisebb szakaszain belül kielégíthető. Az alkalmazás során újabban elért eredmények vázlatos ismertetése:

1. A szóbajövő szilárdságtani feladatok túlnyomó része egy $\mathbf{K}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ alakú matrix-egyenlet megoldására vezet, amelyben a technikai feltételek alapján kimutatható, hogy $|\mathbf{K}| \neq 0$. A megoldást $\mathbf{x}=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}$ alakban nyerjük, ahol ($\mathbf{K}=[K_{jk}]$; $\mathbf{D}=\langle K_{jj}\rangle$; $\mathbf{A}=\mathbf{K}\mathbf{D}^{-1}=\mathbf{B}+\mathbf{E}$; $\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1\,\mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{b}_n]$; $\mathbf{F}_0=\mathbf{E}$ és $\mathbf{F}_n=\mathbf{A}^{-1}$ jelölésekkel) az invertálás az

$$\mathbf{F}_j=\mathbf{F}_{j-1}-\frac{\mathbf{F}_{j-1}\,\mathbf{b}_j\,\mathbf{e}_j^*\,\mathbf{F}_{j-1}}{1+\mathbf{e}_j^*\,\mathbf{F}_{j-1}\,\mathbf{b}_j}$$

rekurziv formulával hajtható végre.

2. A szilárdságtanból vett példán (gerendatartó vizsgálata) egyszerű eszközökkel kimutatható egy differenciálegyenlet differenciaegyenlettel való megközelítéséből származó hiba nagyságrendje.

3. Kétméretű folytonos szerkezetek (lemezek, falak, héjak, stb) numerikus

számításánál alkalmazott matrixszámításra épített két módszer vázlatos ismertetése: *a)* a parciális differenciálegyenletek közelítése differenciaegyenletekkel, *b)* a folytonos modell megközelítése véges sűrűségű tartóráccsal. Az utóbbiból származó előnyök.

FAZEKAS FERENC: *Változó merevségű tengely kritikus szögsebességének vizsgálata matrix-számítás segítségével.* E problémát Egerváry Jenő 1949-ben oldotta meg klasszikus módszerrel. Az előadó ugyanezt a problémát a Marguerre-féle matrix-számításos módszerrel tárgyalja.
A szimmetrikus elrendezésű forgó rendszer bal felének jobb szélső darabja, a *rótor* az $y_1 = \mathbf{R} y_0$ matrixegyenlettel jellemezhető, ahol $\mathbf{R}$ negyedrendű kvadratikus matrix, elemei ω (szögsebesség) függvényei.
A rótortól balra, az *i*-edik *tengelyszakasz* matrixegyenlete $y_{i+1} = \mathbf{R}_i x_i$, ahol $\mathbf{R}_i$ negyedrendű felső háromszögmatrix. A *teljes forgó rendszer* matrixegyenlete tehát $y_{n+1} = \left(\prod_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i\right) \mathbf{R} y_0$. A kerületi feltételek figyelembevételével adódó homogén lineáris egyenletrendszer determinánsának eltűnéséből az Egervárynál is szereplő sajátértékegyenletet kapjuk. Ebből pl. nomogramm segítségével nyerhető a *legkisebb kritikus szögsebesség* közelítő értéke.

SZENDY KÁROLY: *A Laplace-transzformáció egy finit analógiája.* Lineáris differenciál egyenletek megoldása esetén a Laplace-transzformáció visszatranszformálásánál előforduló nehézségek kiküszöbölésére javasolható a függvények diszkrét értékekkel való előállítása. Ilymódon az egyváltozós függvény oszlop-, a kétváltozós téglalapalakú matrixba foglalható. A függvény differenciálhányadosát helyettesítő differencia hányadosának matrixa pedig előállítható két oly oszlopmatrix összegeként, amelynél az első tag egy egyenletes triangulár (háromszög) matrixnak ($\mathbf{D}$) és a függvény matrixának szorzata, a második pedig a függvény kezdeti értékének és a Dirac-függvénynek megfelelő matrixnak szorzata. Hasonlóképpen lehet a *k*-adrendű differencia hányados matrixképét is meghatározni.
Az állandó együtthatójú differenciál egyenlet matrix előállítása $\mathbf{S}\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{Q}\mathbf{e}$, amelybe $\mathbf{S}$ és $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{D}$ matrix polinomjaiként képzett egyenletes triangulármatrixok. Mivel egyenletes triangulár matrixok szorzata kommutábilis, ezek a matrixok skalárként kezelhetők, ilymódon $\mathbf{S}$ matrix inverze könnyen meghatározható. A $\mathbf{D}$ matrix inverze, az $\mathbf{L}$ ún. integrálási mátrix, amely az $1(x-\xi)$ egységfüggvény matrix előállítása. Belátható, hogy $\mathbf{L}$ matrix pedig az $\frac{(x-\xi)}{k!}$ függvény matrix alakja; $e^{-(x-\xi)}$ függvényé pedig $(\mathbf{E} + a\mathbf{L})^{-1} = \mathbf{D}(\mathbf{D} + a\mathbf{E})^{-1}$; továbbá, hogy $y(x-\xi)$ függvény a következő triangulár matrixsor összegével állítható elő: $\sum_{x-\xi=1}^{n} y(x-\xi)\, e^{-(x-\xi)\mathbf{D}}$, amely a Laplace-transzformációnak finit alakja. Bemutatható ebben az esetben is az első és második eltolási tétel érvényessége.
Változó együtthatójú differencia egyenlet is megoldható, azonban az $\mathbf{S}$ matrix már nem egyenletes triangulár matrix, a tényezők felcserélésére pedig megfelelő algoritmust lehet használni.

BRÓDY ANDRÁS: *A mátrix-számítás felhasználása a társadalmi munkamegtakarítás mérésére.* Az előadás szövege megjelenik a MTA Matematikai Kutató Intézete Közleményeiben.

Szeptember 22., hétfő du.

TASSI GÉZA: *Rugalmas-plasztikus állapotú sztatikailag határozatlan szerkezetek vizsgálata matrix-számítás alkalmazásával.* Rúdszerkezetek teherbírásának meghatározásánál és tervezésénél egyre nagyobb teret hódít a képlékenységtan alapján álló számítás. Tetszőleges — egy paramétertől függő — teherhez tartozó erőjáték és alakváltozási állapot meghatározására azonban a szokásos egyszerűsítő feltételezések mellett sem dolgoztak ki részletesen általános eljárást. A matrixszámítás ez új területen való alkalmazásakor le kell győzni az abból adódó nehézségeket, hogy mivel a szuperpozíció elve — szemben a rugalmas anyagú tartókkal — nem érvényes, a feladat *egy* lineáris egyenletrendszerrel nem fogalmazható meg.

A képlékeny alakváltozás közvetett figyelembevételének A. A. Gvozgyev által javasolt módszert továbbfejlesztve a szerkezet erőmódszerrel való megoldásából kiindulva lineáris egyenletrendszer írható fel, amely azt fejezi ki, hogy a — pl. hajlított — tartó valamely keresztmetszetében a külső teher és a plasztikus csuklókon fellépő terhelő elfordulások hatására legfeljebb a határnyomaték lép fel. Törőterhelés esetén az elfordulásokra felírható inhomogén lineáris egyenletrendszer együttható matrixának rangja eggyel kisebb, mint a rendszáma. Automatikus módszerrel meghatározható a terhelési paraméternek az az értéke, amelyre az egyenletrendszer kompatibilis. Minthogy a folyási mechanizmus általában előre nem ismert, a plasztikus csuklók kialakulásának helyeit és a törőteher paraméterét egyszerű minimum feladattal kell meghatározni. Az előfordulásoknak a törőterhelés fellépése pillanatában való értékét az egyenletrendszer *egy* szabad paramétertől függő lineáris megoldásai szolgáltatják. Az lesz a legutoljára kialakuló plasztikus csukló, amelyen fellépő elfordulásnak, mint a szabad paraméter lineáris függvényének zérushelye extrémális. A plasztikus csuklók kialakulási sorrendjét, a rajtuk fellépő elfordulásokat és a nyomatéki ábrákat ugyancsak szélső érték feladat megoldása adja, s ehhez az egyenletrendszer együttható matrixa bizonyos minormatrixainak invertálása szükséges. Ezek egy-egy diád ismételt leválasztásával számíthatók. Az így kidolgozott eljárás könnyen áttekinthető és gépi úton is egyszerűen elvégezhető.
A matematikai probléma megoldása jelentős részben Rózsa Pál munkájának eredménye.

SÁNDOR ISTVÁN: *Feszített betongerenda tartóvégének feszültség-eloszlás-vizsgálata a matrixszámítás segítségével.* Ha egy derékszögű négyszög keresztmetszetű gerenda saját síkjában működő erőkkel van terhelve, akkor síkbeli feszültség állapot vizsgálatáról van szó.
Ezt az állapotot a σ_x és σ_y normális és τ_{xy} nyírófeszültségek jellemzik.
Mint ismeretes, az $F(x, y)$ feszültségfüggvény kielégíti a $\Delta\Delta F(x, y) = 0$ biharmonikus differenciálegyenletet és a megfelelő kerületi feltételeket. Ha a differenciálegyenletet differenciaegyenlettel közelítjük, akkor a következő matrixegyenletet kapjuk a feszültségfüggvénynek (a rácspontokhoz tartozó) értékeiből alkotott $\mathbf{F}$ matrixra:

$$\mathbf{C}^2\mathbf{F} + 2\mathbf{CFC} + \mathbf{FC}^2 = \mathbf{P}.$$

A $\mathbf{P}$ matrix magában foglalja a kerületi feltételeket, $\mathbf{C}$ pedig a második differenciál képzésének megfelelő kontinuáns matrix, amelynek ismert a spektrálfelbontása: $\mathbf{C} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^*$.
Behelyettesítve az egyenletbe és bevezetve az $\mathbf{S} = \mathbf{U}^*\mathbf{F}\mathbf{U}$ és $\mathbf{G} = \mathbf{U}^*\mathbf{P}\mathbf{U}$ matrixokat,

$$s_{ij} = \frac{g_{ij}}{\lambda_i^2 + 2\lambda_i\lambda_j + \lambda_j^2}$$

adódik, ahonnan a keresett f_{ij} értékek, majd pedig a $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ feszültségek (közelítő) értékei meghatározhatók.

SÁRKÁNY GYÖRGY: *Ellenáramú szétválasztó vegyipari alapműveletek elméleti fokozatszámának meghatározásáról.* Az extrakció, rektifikálás és abszorbció elméleti fokozatszámán (elméleti tányérszám) azt értjük, hogy 2 egymással csak részben vagy általában nem elegendő, ellenáramban mozgó folyadék-, illetve gázfázisnak hányszor kell egymással érintkezni és köztük fázisegyensúlyt előállítani ahhoz, hogy az egyes fázisok koncentrációviszonyai előírt módon alakuljanak. Ezért az elméleti fokozatszámot a fázisegyensúly beállítását és a fázisok szétválását jellemző egyenletekből lehet kiszámítani. Minden egyes elméleti fokozatra (érintkezési folyamatra) 4 típusú egyenletet lehet felírni: a koncentrációk fázisegyensúlyi összefüggését, a teljes anyagmérleget, egyik fáziskomponensre vonatkozó anyagmérleget és a fázismennyiséget meghatározó paraméter egyenlegét. Eszerint n elméleti meghatározására 4, egyenként n egyenletből álló egyenletrendszert nyerünk és a feladat az egyes egyenletrendszerek egyenletei számának, n-nek kiszámítása.

Az egyenletrendszerek e szokatlan, az egyenletek számát meghatározó megoldását végeztük el azon feltevések mellett, hogy a fázisegyensúlyt és a fázismennyiséget meghatározó paraméter viselkedését leíró empirikus összefüggéseket szakaszonként lineáris függvénnyel lehet megközelíteni. Az így nyert egyenletrendszereket matrixegyenletek alakjában írjuk fel. Lineáris matrixegyenleteket nyerünk, ha a fázismennyiséget meghatározó paramétert állandónak tekinthetjük. Az egyenletek számának meghatározása a matrixegyenletben szereplő nilpotens matrix explicit alakban könnyen előállítható polinomjának alkalmazása révén válik lehetővé. Bonyolultabb, nem lineáris matrixegyenletek adódnak, ha a fázismennyiséget meghatározó paramétert is szakaszonként lineáris függvényekkel közelítjük. Ezekből a matrixegyenletekből az ismeretlen koncentrációk kiküszöbölhetők és a megmaradó ismeretlenek számára tört-lineáris rekurziós formulát nyerünk, amelyből n ismét kiszámítható. Az eddigi eredmények, — amelyekhez Rózsa Pál közreműködésével jutottunk, — összhangban vannak az irodalomban hasonló esetekre nyert képletekkel.

KREKÓ BÉLA: *A simplex módszer néhány alkalmazása (gazdasági problémák megoldására).* Legyenek a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ vektorok az n-dimenziós tér egyik bázisának vektorai. Ha valamelyik $\mathbf{b}_i$ vektort kicseréljük a tér egy alkalmasan megválasztott $\mathbf{a}$ vektorával, megváltoznak a tér vektorainak az új bázisra vonatkozó koordinátái is. A lineáris programozással kapcsolatos szimplex módszer numerikus szempontból is igen egyszerű eljárást ad az új koordináták meghatározására. Ezt az eljárást elemi transzformációnak fogjuk nevezni.

Ilyen elemi transzformációk sorozatos alkalmazásával bármely $\mathbf{A}$ matrix oszlopvektoraiból r lépésben kiválaszthatunk r olyan vektort, amely bázisát alkotja az oszlopvektortérnek. (Az r az $\mathbf{A}$ rangja.) Ezzel a kérdéses matrixnak egy olyan, az

$$\underset{(m,n)}{\mathbf{A}} = \underset{(m,\lambda)}{\mathbf{A}_1} \cdot \underset{(\lambda,n)}{\mathbf{A}_2}$$

alakban felírható sajátos bázisfelbontását nyerjük, ahol az $\mathbf{A}_1$ oszlopvektorai a kiválasztott bázisvektorok lesznek, az $\mathbf{A}_2$ pedig — oszlopvektorainak megfelelő átrendezésével — az

$$[\mathbf{E}, \mathbf{D}]$$

alakra hozható. Itt az első blokk egy r-edrendű egységmatrix, a $\mathbf{D}$ pedig egy $(r, n-r)$ típusú matrix.

Tekintsük ezután az

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{a}$$

egyenletet. Ha történetesen az $\mathbf{A}$ első r oszlopvektora alkotja az oszlopvektortér bázisát, akkor az előzőek szerint

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cdot [\mathbf{E}, \mathbf{D}];$$

ha pedig egyenletünk eleget tesz a kompatibilitás követelményének, akkor

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}_1 \mathbf{c}.$$

E feltételek mellett egyenletünk ekvivalens lesz az

$$[\mathbf{E}, \mathbf{D}]\, \mathbf{x} = \mathbf{c}$$

egyenlettel. Ennek megoldása pedig az

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{D} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \mathbf{t}$$

alakban írható fel, ahol a $\mathbf{t}$ bármilyen $n-r$ elemű vektor lehet. Nevezetes körülmény, hogy az említett numerikus eljárás közvetlenül szolgáltatja mind a $\mathbf{c}$, mind a $\mathbf{D}$ elemeit. Ugyanekkor a kompatibilitás kérdése is automatikusan realizálódik.

Ez a módszer természetesen jól alkalmazható a matrixok inverzének meghatározására is. Erre számos példa hozható a gazdasági tervezés területéről.

Dömölki Bálint: *Szállítási feladat megoldása automatikus számológépek segítségével.* „Szállítási feladat"-nak a lineáris programozás feladatának azt a speciális esetét szokták nevezni, amikor megadott $x_i \geqq 0$, $y_j \geqq 0$ és $c_{ij} \geqq 0$ számokhoz kell olyan z_{ij} nemnegatív elemekből álló matrixot keresni, hogy a

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} z_{ij} &= x_i \\ \sum_{i=1}^{m} z_{ij} &= z_j \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\quad j = 1, 2, \ldots, n)$$

feltételek teljesülése mellett a

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} z_{ij}$$

összeg értéke minimális legyen.

A feladat numerikus megoldására általában használatos módszer, egy tetszőleges kiinduló megoldás sorozatos javításán alapul. Előadó vázolja a módszer célravezető voltának egy bizonyítását a matrixok és gráfok kapcsolata segítségével. Rámutat a módszer különleges előnyeire automatikus számológépekre való alkalmazhatóság szempontjából, valamint ismertet néhány problémát, amelyek az $M-3$ gépre való programozás során vetődtek fel.

Szeptember 23., kedd de.

Egerváry Jenő: *Konstruktív módszer matrixoknak Jordan-féle normálalakra való redukálására.* Az előadott módszer a Jordan-féle normálalakra való redukálást két lépésben hajtja végre, az adott matrix jobb- és baloldali saját- és fővektorainak szimultán és szimmetrikus alkalmazása mellett.

Először a hermitikus projektoroknak bázisfaktorokra bontása útján nyert transzformáló matrixokkal az adott matrixot olyan diagonális hypermatrixokra redukáljuk, amelynek blokkjai az egyes sajátértékekhez tartozó jobb- és baloldali invariáns alterek bázisait szolgáltatják. Minden egyes blokk additive tevődik össze egy idempotens és egy nilpotens komponensből.
Másodszor minden egyes nilpotens komponenshez egyszerű algoritmus segélyével a jobb- és baloldali fővektoroknak egy biortogonális rendszerét számítjuk ki. Ezek segélyével egy nem-derogatorius nilpotens matrix azonnal Jordan alakra redukálható, a derogatorius esetben pedig az eljárás iterációjával adódik a végleges redukált alak, mint Jordan-direkt összege.

Szőkefalvi-Nagy Béla: *Egyenletesen korlátos lineáris transzformációk véges dimenziós euklidesi térben.* Legyen $y = Tx$ a véges dimenziós komplex euklidesi R tér egy lineáris transzformációja (azaz $T(ax_1 + bx_2) = aTx_1 + bTx_2$), és tegyük fel, hogy ez egyenletesen korlátos abban az értelemben, hogy létezik olyan M konstans, amelyre

$$\|T^n x\| \leqq M\|x\| \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$\|\cdot\|$ jelentvén a vektorok hosszúságát. A következőt bizonyította be az előadó: T hasonló egy kontrakcióhoz, azaz van olyan invertálható B lineáris transzformációja R-nek önmagára, amelyre $\|BTB^{-1}x\| \leqq \|x\|$.

Kovács László: *Megjegyzés a lineáris egyenletrendszerek elméletével kapcsolatban.* Az előadó rámutatott a particionált matrixok szorzásszabályának a lineáris egyenletrendszerek elméletével való kapcsolatára. A particionált matrixok szorzásszabálya természetes ekvivalenciát biztosít megfelelő típusú matrixok felett értelmezett lineáris egyenletrendszerek és skaláris egyenletrendszerek között. Ezen ekvivalencia segítségével konstruktív bizonyítás nyerhető arra az először Kertész Andor által bizonyított tételre, amely szerint a lineáris egyenletrendszerek klasszikus elmélete féligegyszerű gyűrűk felett is érvényes.

Szeptember 23., kedd du.

Rédei László és Turán Pál: *A ciklikus matrix rangja véges test felett.* Ha B egy q-elemű véges test, akkor szerzők kimutatták, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{q-2} \\ \alpha_{q-2} & \alpha_0 & \cdots & \alpha_{q-3} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_\nu \in B, \quad \alpha_0 \neq 0$$

alakban írt ciklikus matrix rangja ν, ha ν az

$$A_{q-1} = A_{q-2} = \cdots = A_{q-\nu} = 0, \quad A_{q-1-\nu} \neq 0$$

-val van definiálva; itt A_j jelenti az A j-ed rendű főminorjai összegét. A bizonyítás indirekte adódik azon tételükből, hogy az $\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{q-2} x^{q-2} = 0$ egyenlet B-beli különböző megoldásainak száma az előbbi ν-vel egyenlő.

Kalmár László: *Egy probléma a Boole-féle matrixok áramköri alkalmazásaival kapcsolatban.* Boole-féle matrixnak nevezünk egy (négyzetes) matrixot, ha elemei valamely Boole-féle algebra elemei. Ilyen matrixokkal hasonlóan végzünk műveleteket, mint közönséges matrixokkal, csak az elemek összeadásának és szorzásának szerepét a megfelelő Boole-féle műveletek (diszjunkció vagy más néven unió, ill. konjukció vagy más néven metszet) veszik át.

Tekintsünk egy elektromechanikus blokkot, amelynek $R_1, R_2, \ldots, R_k$ jelfogói bizonyos $x_1, x_2, \ldots, x_k$ külső körülményekre reagálnak oly módon, hogy az R_i jelfogó akkor és csak akkor húz meg, ha az x_i körülmény bekövetkezik; ez esetben legyen $X_i = \uparrow$, más esetben $X_i = \downarrow$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Legyen a blokknak n kivezetése: $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Legyenek előírva a blokk működési feltételei abban a formában, hogy $i, j = 1, 2, \ldots, n$ esetén legyen előírva, hogy annak az ítéletnek a logikai értéke, hogy a P_i és P_j pontok között a blokk vezető összeköttetést létesít, milyen f_{ij} (Boole-féle) függvénye legyen az $X_1, X_2, \ldots, X_k$ logikai változóknak. Ezen f_{ij} függvények (logikai formulák) Boole-féle matrixot alkotnak.

Minthogy a P_i pontok mindegyike önmagával mindig vezető összeköttetésben van (a külső körülményektől függetlenül), ezért azonosan $f_{ii} = \uparrow$, vagyis az F matrix átlós elemei $\uparrow$-zal egyenlők. Minthogy a P_i pont akkor és csakis akkor van vezető összeköttetésben a P_j ponttal, ha P_j vezető összeköttetésben van a P_i ponttal, ezért $f_{ij} = f_{ji}$, vagyis a F matrix szimmetrikus. Minthogy a vezető összeköttetés tranzitív, ezért valahányszor $f_{ij} = \uparrow$ és $f_{jh} = \uparrow$, mindannyiszor $f_{ih} = \uparrow$. Ebből következik, hogy

$$f_{ih} = f_{i1}f_{1h} \vee f_{i2}f_{2h} \vee \cdots \vee f_{in}f_{nh};$$

ha ugyanis a baloldal értéke $\uparrow$, akkor a jobboldal $f_{ih}f_{hh}$ tagja $f_{hh} = \uparrow$ miatt $\uparrow$, tehát az egész jobboldal is; fordítva, ha a jobboldal értéke $\uparrow$, vagyis valamelyik tagja $\uparrow$, akkor az említett tranzitivitás miatt a baloldal is $\uparrow$. Ennélfogva az F Boole-féle matrix idempotens: $F^2 = F$. (A tranzitivitás ezen matrixelméleti átfogalmazására Pollák György hívta fel a figyelmemet; valószínűnek tartom azonban, hogy előbb is ismert volt.)

Eszerint a szóbanforgó elektromechanikus blokk F „feltételmatrixa" az átlóban csupa $\uparrow$ elemet tartalmazó, szimmetrikus, idempotens matrix; fordítva, minden ilyen matrix tekinthető feltételmatrixnak.

Mármost egy adott elektromechanikus blokk helyességének, vagyis annak ellenőrzése, megfelel-e az előírt működési feltételeknek, tehát annak az ítéletnek logikai értéke, hogy a P_i és P_j pontok között van vezető összeköttetés, az $X_1, X_2, \ldots, X_k$ logikai változók minden értéke mellett $f_{ij}(X_1, X_2, \ldots, X_k)$-val egyenlő-e, rendszerint (amennyiben nem szorítkozunk szúrópróbaszerű ellenőrzésre) úgy történik, hogy $j = 2, 3, \ldots, n$ és $i = 1, 2, \ldots, j-1$ esetén ellenőrizzük, a mondott egyenlőség fennáll-e ($X_1, X_2, \ldots, X_k$ minden értékére). Más szóval az F matrixnak csak azt a tulajdonságát használjuk ki, hogy átlójában csupa $\uparrow$ áll és hogy szimmetrikus. Ez azonban feleslegesen sok próbát igényel, hiszen a matrix idempotenciáját nem használtuk ki.

Világos, hogy a mondott próbák közül mindemellett egyetlen egyet sem hagyhatunk el minden esetben, mert hiába ellenőriztük az említett egyenlőség fennállását $i < j$, $i \neq i_0, j \neq j_0$ esetén $(i_0 < j_0)$, ebből még nem tudhatjuk, fennáll-e $i = i_0$, $j = j_0$ esetén is. Ugyanis előfordulhat, hogy az $X_1, X_2, \ldots, X_k$ változók valamely értéke mellett $i < j$, $i \neq i_0$, $j \neq j_0$ esetén $f_{ij} = \downarrow$, ezzel, valamint az idempotenciával $f_{i_0 j_0} = \uparrow$ is, $f_{i_0 j_0} = \downarrow$ is összefér. Más szóval: az F matrix átlóalatti elemei az idempotencia miatt nem függetlenek, mégsem (egyértékű) függvénye egyik sem a többinek.

Lehetségesnek látszik azonban az ellenőrzéshez használt próbák számának csökkentése, ha nem maguknak a matrixelemeknek, hanem azok bizonyos

Boole-féle függvényeinek megegyezését ellenőrizzük (a valóságos blokkra vonatkozó ill. a működési feltételekből kapott matrix esetén).

Így a következő probléma adódik. *Meghatározandó egy F szimmetrikus, idempotens, az átlóban csupa* ↑*-at tartalmazó Boole-féle matrix* f_{ij} *elemeinek lehető kevésszámú Boole-féle függvényéből álló olyan rendszere, hogy amenynyiben e függvényrendszer elemei két szimmetrikus, idempotens, az átlóban csupa* ↑*-at tartalmazó Boole-féle matrix esetén megegyeznek, akkor a két matrix azonos.*

Rózsa Pál: *A lineáris programozás matrixelméleti megalapozása.* A lineáris egyenletrendszerek megoldásának problémája matrixelméleti szempontból abban áll, hogy az adott egyenletrendszert egy vele ekvivalens olyan egyenletrendszerré alakítsuk át, amelynek együtthatómatrixa *Hermite*-féle normál alakú. (A Hermite féle normál alakú matrix olyan kvadratikus matrix, amelynek ődiagonálisában minden elem 1 vagy 0, ahol 1 áll, ott ennek az oszlopában valamennyi többi elem 0, ahol 0 áll, ott ennek a sorában valamennyi többi elem 0.) A Hermite-féle normál-alakú együtthatómatrixszal bíró egyenletrendszer tehát automatikusan szétválasztja az ismeretleneket „szabad" és „kötött" ismeretlenekre.

Megadható egy egyszerű algoritmus, amelynek segítségével a Hermite-féle normál-alakú matrix egy olyan másik ugyancsak Hermite-féle normálalakú matrixra transzformálható, hogy az 1-esek a fődiagonálisnak más helyén álljanak, tehát mások legyenek az egyenletrendszer szabad, illetve kötött ismeretlenei.

A lineáris programozás alapfeladata tudvalevően egy lineáris egyenlőtlenségrendszer olyan nem-negatív megoldásainak a meghatározása, amelyek bizonyos lineáris függvényt maximalizálnak (ill. minimalizálnak). Ha az egyenlőtlenségrendszert új ismeretlenek behozásával egyenletrendszerré alakítjuk át, Hermite-féle normálalakú együtthatómatrixszal bíró egyenletrendszert nyerünk, amelynek az adott feltételeket kielégítő megoldásához az említett algoritmus megfelelő alkalmazásával jutunk. Ezzel tulajdonképpen a *Dantzig* nevéhez fűződő úgynevezett szimplex-módszernek tisztán matrixelméleti interpretációját nyerjük.

Hajtman Béla: *Monokvadratikus egyenletrendszerek megoldásáról.* Az egyetlen másodfokú és több lineáris egyenletből álló egyenletrendszerekre explicit megoldóképletet írt fel az előadó.

$$(1) \qquad (Px_i - R_i)^2 = 0,$$

ahol P és R_i jól kezelhető szimbolikus determinánsok, x_i pedig az egyik, nem teljesen tetszőlegesen választott ismeretlen. A fenti képletet az egyenletek számával megegyező számú ismeretlent tartalmazó egyenletrendszerekre vezette le, de megmutatta, hogy az általános eset lényegileg erre vezethető vissza.

Az (1) képlet segítségével elvégezte az előadó a megoldások teljes algebrai diszkusszióját is. Végül rámutatott, hogy a követett eljárás alkalmazható olyan, a monokvadratikushoz hasonló egyenletrendszerek esetében is, amelyek a lineáris egyenleteken kívül egy tetszőleges magasabbfokú egyenletet tartalmaznak.

Pethő Árpád: *Megjegyzés a) lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságával, b) lineáris differenciaegyenletek matrixmegoldásával kapcsolatban.*

a) Ismeretes, hogy egy K ferdetestben adott $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ $(i=1,\ldots,m)$ lineáris egyenletrendszer (itt $n=m$ feltehető, $n \neq m$ esetben ui. az ismeretlenek ill. az egyenletek számát triviálisan úgy növeljük, hogy $n=m$ fennálljon) egyértelmű megoldhatóságának szükséges és elegendő feltétele az $[a_{ij}]$ (kvadratikus) matrix regularitása. Az előadó általánosítása a következő: a fenti egyenletrendszer az ismeretlenek $(x_1,\ldots,x_n)$ halmazának $(x_{\nu_1},\ldots,x_{\nu_2})$ $(k \leqq n)$ részhalmazát akkor és csak akkor határozza meg egyértelműen, ha $1°$ a rendszer kompatibilis; $2°$ rang $[a_{ij}]-k=$ rang $[a'_{ij}]$, ahol

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & j \neq \nu_1,\ldots,\nu_k \\ 0, & j = \nu_1,\ldots,\nu_k. \end{cases}$$

b) *b)* A differenciaszámításban a (kétváltozós) parciális állandó együtthatójú egyenletek kezdőértékfeladatának közönséges egyenletek kezdőértékfeladatává való redukciójára ismeretes a generátorfüggvénymódszer; az előadó egy eljárást ismertetett, amellyel a redukció elemi matrixszámítással végrehajtható.

Aczél János: *A matrix-számítás alkalmazása a geometriai okjektumok elméletében.* A matrixszámításnak, azon belül különösen a multiplikatív matrix-matrix függvényeknek és a vektor-vektor függvények matrixderiváltjának alkalmazása a geometriai objektumok klasszifikációelméletére (lineáris objektumok), kovariáns deriváltjára, algebrájára és komitánsaira.

Hosszú Miklós: *A matrix-számítás alkalmazása a geometriai objektumok elméletében. II.* Az előadó két egyszerű bizonyítást adott M. Kucharzewski azon tételére, amely szerint a matrixok skalár értékű multiplikatív függvénye csupán a matrix determinánsától függ, éspedig közönséges értelemben multiplikatív módon. Az egyik bizonyítás azon alapszik, hogy minden matrix felbontható két tényezőre, amelyek külön-külön diagonális alakra transzformálhatók, diagonális matrixokra viszont már egyszerűen bizonyítható a tétel állítása; a másik bizonyítás J. Dieudonné egy tételére támaszkodik, amely szerint (egy ferdetest felett) minden invertálható mátrix felbontható olyan tényezők szorzatára, amelyeknek csupán egyik eleme különbözik az egységmatrixtól, s ilyen típusú matrixok skalár értékű multiplikatív függvénye már szintén egyszerűen kiszámítható.

Balogh Albert: *Egydimenziós, egykomponensű első és másodosztályú geometriai objektumok racionális tört transzformációs képletének meghatározása.* Az egydimenziós egy komponensű első és másodosztályú racionális tört transzformációs képletű geometriai objektumok meghatározása a következő matrix függvény egyenletekhez vezet:

a) $$\lambda(x,y)\,F(xy) = F(x)\,F(y)$$

b) $$\lambda(y_1,y_2,z_1,z_2)\,(F(y_1z_1,\,y_1^2z_2+z_1y_2) = F(z_1,z_2)\,F(y_1,y_2),$$

ahol $F(x) = (f_{ij}(x))$ $(i,j=1,2)$ 2×2-es típusú matrixot jelöl. Az előadásban ezen függvényegyenletek megoldását, valamint a racionális tört transzformációs képletű geometriai objektumok meghatározását tárgyalta az előadó.

Szekeres György: *Matrixok exponenciális és poláris előállítása.* Ismeretes, hogy a klasszikus folytonos matrixcsoportok elemei előállíthatók $A = \exp T$ alakban, hol T egy lineáris matrixtér elemeit futja végig. N. G. de Bruijn és az előadó munkája egyéb matrixsokaságok exponenciális előállítását tárgyalja egységes módszer szerint. Például minden szimmetrikus unitér matrix $\exp iS$ alakra hozható, ahol S valós szimmetrikus.

Néhány új poláris előállítást is lehet nyerni a módszerrel, melyek közt legérdekesebb a következő: Minden nem-szinguláris matrix előállítható $R \exp iT$ alakban, ahol R, T valós matrixok.

ERDŐS PÁL: *Matrixok kombinatorikus tulajdonságai.* Legyen (a_{ik}) n-edrendű duplán sztochasztikus matrix. Van der Waerden 30 éve sejtette, hogy a kifejtési tagok abszolút értékeinek összege $\geqq \frac{n!}{n^n}$, egyenlőség akkor és csakis akkor, ha $a_{ik} = \frac{1}{n}$. E sejtés mindmáig nincsen bebizonyítva.

Előadó sejtette, hogy mindig van egy 0-tól különböző kifejtési tag, amelyben a tényezők összege $\geqq 1$. Marcus és Rhee be is bizonyították, sőt azt is kimutatták, hogy van egy 0-tól különböző kifejtési tag, amelyben a tényezők összege $\geqq \frac{1}{n} \sum a_{ik}^2$.

Előadó egy másik sejtése, hogy van egy kifejtési tag, amelyben a tényezők szorzata $\geqq \frac{1}{n^n}$, de ez eddig nincs bebizonyítva.

A Bolyai János Matematikai Társulat budapesti előadásai 1958 július 1-től december 31-ig

Szeptember 19.

K. MARUHN: *Über hydrodinamische Existenzfragen.*

Szeptember 20.

SURÁNYI JÁNOS: *Egy nevezetes rácsgeometriai tétel és alkalmazásai.* Középiskolai matematikai délután.

Október 10.

I. M. BEREZANSZKIJ: *Differenciáloperátorok felbontása sajátfüggvények szerint.* Az előadás az L_2-ben értelmezett önadjungált operátorok sajátfüggvények szerinti felbontásával foglalkozott, amely a korlátos operátorok kváziintegrállal való előállítása alapján történt. Ezek az eredmények alkalmazásra kerültek a közönséges és parciális differenciáloperátorok, valamint a differenciaoperátorok sajátfüggvények szerinti felbontásánál. Az előadás anyaga a következő cikkekben található:

1. „Razlozsényije po szobsztvennim funkcijam szumoszoprjazsennih operatorov", Matem. Szbornyik, 43, NT. (1957), 75—126.
2. „Razlozsényija po szobsztvennim funkcijam uravnyenyij b csasztnih razrosztjah vtorovo porjádka", Trudi Moszk. matem. ob.-va 5 (1956), 203—268.

Október 17.

S. MARCUS: *A Riemann-integrál egy Lebesgue-tipusú elméletéről.* Legyen E az R^n térnek egy kvadrálható halmaza. Az E-n értelmezett valós f függvény Jordan szerint mérhető E-n, ha azok az α-k, amelyekre az $\{x \mid x \in E, f(x) > \alpha\}$